385. Quasi-metric Space ニ就イテ

角谷静夫（阪大）

空間 R ノ任意ノ二点 x, y ニ對シテ x ヨリ y ヘノ distance xy 及ビ y ヨリ x ヘノ distance yx ガ定義サレテコレガ

$$\text{i)}\quad xy \geqq 0 \left\{\begin{array}{l} xy=0 \text{ 及ビ } yx=0 \text{ ガ同時ニ成立スル} \\ \text{ノハ } x=y \text{ ナルトキ且コノ時ニ限ル。} \end{array}\right\}$$

$$\text{ii)}\quad xy+yz \geqq xz$$

ヲ満足スルトキ R ハ quasi-metric デアルト云フ。$xy=yx$ ハ必ズシモ満足サレテヰル必要ハナイ。($xy=yx$ ガ常ニ満足サレテ居レバ R ハ metric space ニナル。)

quasi-metric space ハ Wilson (American Journ. of Math. 1931) ニヨッテ研究サレタ。Wilson ハ quasi-metric space ノ一例トシテ，metric space R^* (コレニ属スル二点 a, b ノ距離ハ $\rho(a,b)$ ニテ與ヘラレルモノトスル) ニ於ケル閉集合ヲ element トスル空間ニ於テ二ツノ閉集合 A, B ニ對シテ A ヨリ B ヘノ距離 AB ヲ

$$AB = \underset{b\in B}{\text{upper bound}} \left\{ \underset{a\in A}{\text{lower bound}}\ \rho(a,b) \right\} \qquad (1)$$

ニヨッテ定義スレバヨイコトヲ示シテヰル。(A, B ニハ共通点ガアッテモヨイ。又 AB=0 トナルノハ B⊆A ナルトキ且ソノ時ニ限ル。故ニ AB=BA=0 トナルノハ A=B ナルトキ、且ソノ時ニ限ル。)

次ニコノ逆ガ成立スルコトヲ証明スル。即チ次ノ定理ガ成立スルコトヲ証明スル。

定理　空間Rガ *quasi-metric* デアレバ *metric space* R^* ヲ適當ニ定メテ R^* ニ於ケル閉集合ヲ *element* トスル空間ニ(1)ニヨリ *quasi-metrics* ヲ導入シタモノガ R ト *iso-(quasi)-metric* ニナルヤウニスルコトガ出來ル。

シカモ R^* トシテ $R \times R$ ニ於イテ定義サレタ實數値ノ函數 $f(\xi, \eta)$ $(\xi, \eta \in R)$ ヲ *element* トスル空間ヲ考ヘ、コレニ屬スル f_1, f_2 ニ對シテ距離 $\rho(f_1, f_2)$ ヲ

$$\rho(f_1, f_2) = \underset{\xi, \eta \in R}{\text{upper bound}} \left| f_1(\xi, \eta) - f_2(\xi, \eta) \right|$$

ニヨッテ定義シ R ニ屬スル一点 x ニ對應スル R^* ノ閉集合トシテスベテノ ξ, η ニ對シテ

$$-\xi x \leqq f(\xi, \eta) \leqq \eta x$$

ヲ滿足スルアラユル函数 $f(\xi, \eta)$ ノ集合 F_x ヲトレバヨイ。

證明.　F_x ガ閉集合デアルコトハ明カデアルカラ

$$xy = \underset{f_2 \in F_y}{\text{upper bound}} \left\{ \underset{f_1 \in F_x}{\text{lower bound}}\ \rho(f_1, f_2) \right\}$$

トナルコトヲ證明スレバヨイ。

$f_2 \in F_y$ ヲ F_y ニ屬スル任意ノ函数トスレバ任意ノ ξ, η ニ對シテ

$$-\xi y \leqq f_2(\xi, \eta) \leqq \eta y$$

デアリ且ツ

$$\eta y-\eta x\leqq xy,\quad \xi y-\xi x\leqq xy$$

デアルカラ $f_1(\xi,\eta)$ ヲ適當ニ定義シテ

$$-\xi x\leqq f_1(\xi,\eta)\leqq \eta x$$

ニテ

$$|f_1(\xi,\eta)-f_2(\xi,\eta)|\leqq xy$$

トナル如クスルコトガ出來ル。ヨツテ

$$\text{lower bound}\ \rho(f_1,f_2)\leqq xy$$

然ルニ R×R ノ點 (y,x) ニ於テ $f(y,x)=xy$ トナル如キ $\mathfrak{F}_y$ ノ函數 $f_2(\xi,\eta)$ ヲトレバ $\mathfrak{F}_x$ ニ屬スル任意ノ函數 $f_1(\xi,\eta)$ ニ對シテ

$$-yx\leqq f_1(y,x)\leqq 0$$

デアルカラ $\rho(f_1,f_2)\geqq xy$.

コレヨリ、コノ f_2 ニ對シテハ

$$\underset{f_1\in\mathfrak{F}_x}{\text{lower bound}}\ \rho(f_1,f_2)\geqq xy$$

ヨツテ結局

$$xy=\underset{f_2\in\mathfrak{F}_y}{\text{upper bound}}\left\{\underset{f_1\in\mathfrak{F}_x}{\text{lower bound}}\ \rho(f_1,f_2)\right\}$$

トナル。